若手奨励賞

場の量子論に基づいた相対論的流体力学の基礎づけ

本郷 優
慶應義塾大学 自然科学教育センター, 理化学研究所 数理創造プログラム (iTHEMS)

本稿では，第 13 回 (2019 年) 日本物理学会若手奨励賞 (理論核物理領域) の受賞対象となった論文 [1]

> “Relativistic hydrodynamics from quantum field theory on the basis of the generalized Gibbs ensemble method”,
> T. Hayata, Y. Hidaka, T. Noumi, and M. Hongo, Phys. Rev. D **92**, 065008 (2015)

の研究成果について，関連研究 [2–4] で得られた知見も交えながら解説を行う.

1　背景：いまさら相対論的流体力学?

相対論的場の量子論で記述されるような素粒子の量子多体系であっても， それが局所熱平衡状態に十分近いならば，**相対論的流体力学**を用いてマクロスケールの時空発展を記述することができる．しかしながら，クォーク・グルーオンなどの量子色力学 (QCD) で記述される素粒子は我々の日常的なエネルギースケールでは (陽子・中性子など) ハドロンという形でとじこめられていることを思い出すと，これらがバラバラになった**クォーク・グルーオン・プラズマ (QGP)** という素粒子の流体を実現するためには，極端な高温状態を実現する必要がある．このように「素粒子の多体系も流体としてふるまうはずだろう」ということは遥か昔にフェルミやランダウが指摘していたが，この言うはやさしくも検証は極めて困難なことが，驚くべきことに 2000 年代に入ってから高エネルギー重イオン衝突実験という加速器実験で実現・検証されてきている ([5, 6] を

参照)．実際，アメリカ Brookhaven 国立研究所の Relativistic Heavy-Ion Collider (RHIC) や欧州 CERN の Large Hadron Collider (LHC) では，光速の 99.9999 パーセント以上に加速させた重イオン原子核を衝突させることで，2 兆度をはるかに超える超高温の QGP(=素粒子多体系) を生成し，相対論的流体力学などの模型に基づいた研究が盛んに進められてきた．目標は，単純に相対論的流体力学を用いて QGP の時空発展を記述するというだけではなく，状態方程式や輸送係数の値のように，QCD で記述されるクォーク・グルーオン多体系の物性情報を調べることである．理論・実験の双方が密に協力した研究の結果，実現された QGP 状態はずれ粘性 (をエンタルピーで割って無次元化したもの) などの輸送係数が極めて小さな値を持つ，人類が手にした物質の中で最も「サラサラした (強結合) 流体」のようにふるまっているという状況証拠が揃ってきている．さらに一方で，純粋に理論的な進展として，QCD と似た非可換ゲージ理論について，ある強結合領域を考えると 1 次元高い古典的な重力理論と等価であること (**AdS/CFT 対応**) が提案され，小さなずれ粘性はその予言と [7] も合致するものであった．近年ではこのような簡単な流体描像を超えて，QGP のさらなる物性情報を得るために詳細な研究が続けられている．

さて，重イオン衝突実験で生成された QGP が相対論的流体力学に基づいて記述できるとなると，そもそもミクロには場の量子論で記述されるクォーク・グルーオンの量子多体系が，なぜ流体力学でよく記述できるのかという理論的な基礎づけが知りたくなる．従来，ボルツマン方程式に基づいて流体方程式を導出するという研究は数多くなされてきたが,「希薄ガス (弱結合) 極限でのみ適用可能なボルツマン方程式を用いて，強結合領域にも適用可能な流体力学を導出する」というのは哲学として少しおかしいようにも思う[1]．AdS/CFT 対応に基づいて，これまでは調べられなかった強結合領域における流体力学的ふるまいが調べられるようになったこと [8,9] も考慮すると，**結合定数の強弱などに依存せずに，場の量子論に基づいた記述から流体力学を正当化する手法**が開発されるべきである．このあたりの理由が絡んだかはわからないが，2000 年代の中頃から相対論的流体力学の理論に関する研究が盛んになり，その理解が深まることになった [10–17]．本稿では，このような研究の流れの中で筆者が行った「場の量子論に基づいて流体力学を導出できるか?」という問いに対する 1 つの解答を与えた研究について解説する ([18] も参照)[2]．

2 設定：「流体方程式を導出する」とはどういうことか

では，振り返って「流体力学を導出する」とは具体的にはどういうことだろうか．まずは流体力学の理論構造を復習し，この問題がどのように定式化されるかをはっきりさせよう．

流体力学の理論構造

流体力学は保存量密度のマクロな時空発展を記述する有効理論なので，運動方程式は，エネルギー・運動量保存則 $\partial_\mu \hat{T}^\mu_{\ \nu} = 0$ や (フレーバーなどの) 内部対称性に付随する保存則 $\partial_\mu \hat{J}^\mu = 0$ であると思われる．ここで，$\hat{T}^\mu_{\ \nu}$ はエネルギー・運動量テンソル演算子，$\hat{J}^\mu$ は保存するカレント演算子を与える (以下ではこれらをまとめて $\hat{\mathcal{J}}^\mu_a \equiv \{\hat{T}^\mu_{\ \nu}, \hat{J}^\mu\}$ と書く)．これらの量子論的な演算子恒等式は，考えている量子系が QGP のような場の量子論で記述される系であっても，時空並進対称性と内部対称性を持つとき，(相互作用の形などの) 理論の詳細に関わらず成立する．しかし，

[1]もちろん，弱結合領域でも流体力学は使えるので，そのような「弱結合流体」を念頭に置いているならよい．しかし，実験的に生成された QGP は強結合領域にあると信じられいるため，ボルツマン方程式を用いて流体方程式を導出するのは，実用の上で便利であっても，理論的な正当化はできない取り扱いだと思う．

[2]本稿で解説する研究は，直接的には非平衡統計力学の近年の進展に基づいた古典 N 粒子系に対する非相対論的流体方程式の導出 [19] にモチベートされて行われた．しかし，研究を完成させた後に我々の議論とほとんど等価な (しかし，部分的には不完全な) 理論的枠組みが，はるか昔にロシアの物理学者 Zubarev によって定式化されていたこと [20] を知った (彼らの手法の詳細は [21–24])．

これは流体力学が適用できないようなミクロな時間・空間スケールのダイナミクスを記述する際にも成立する恒等式であり，マクロなダイナミクスを記述する流体力学の運動方程式自身になっているわけではない．そのため，流体力学の運動方程式を与えるためには，この演算子恒等式に対して**「ある種のマクロ平均を取る」**という操作を施す必要がある．次節で，この「ある種のマクロ平均」の定義を与えるが，いまのところはその定義を後回しにし，これを $\langle \hat{\mathcal{J}}^{\mu}_{a} \rangle$ と表すことにする．すると，上の演算子恒等式から保存量密度のマクロ平均 $\langle \hat{\mathcal{J}}^{0}_{a} \rangle$ の時空発展を記述する

$$\text{保存則 (のマクロ平均)：}\quad \partial_\mu \langle \hat{\mathcal{J}}^{\mu}_{a} \rangle = 0 \tag{1}$$

が得られる．このマクロ平均を取った保存則が流体力学の基礎方程式を与えている．

しかし，この保存則のみでは閉じた方程式系を与えず，解くことができないという問題がある．つまり，$\langle \hat{\mathcal{J}}^{0}_{a} \rangle$ のダイナミクスを追うためには，$\langle \hat{\mathcal{J}}^{i}_{a} \rangle$ というカレントの期待値を知る必要があるが，いまのところはこれが未知のままである．したがって，上の保存則を閉じた方程式系にするためには $\langle \hat{\mathcal{J}}^{i}_{a} \rangle$ を $\langle \hat{\mathcal{J}}^{0}_{a} \rangle$ を用いて表す

$$\text{構成方程式：}\quad \langle \hat{\mathcal{J}}^{i}_{a} \rangle = \mathcal{J}^{i}_{a}[\mathcal{J}^{0}_{a}] \quad \text{with} \quad \mathcal{J}^{0}_{a} \equiv \langle \hat{\mathcal{J}}^{0}_{a} \rangle \tag{2}$$

という関係式が必要になる[3]．ここで，右辺の $\mathcal{J}^{0}_{a}$ を引数にした角括弧は $\langle \hat{\mathcal{J}}^{i}_{a} \rangle$ を流体力学の独立な力学変数 $\mathcal{J}^{0}_{a}$ で表すという「従属変数としての関数関係」を意味している．

ひとたび構成方程式 (2) がわかると保存則が独立変数 $\mathcal{J}^{0}_{a}$ だけで表された閉じた方程式系を与えるため，解くことができるように思われる．しかし，考えている流体が何であったか (水か油か QGP か...) という構成要素たる物質の物性情報はどこに行ったのだろうか．QGP さえ含む様々な種類の物質に対して流体力学が使えるという我々の経験は，流体方程式，あるいは構成方程式の「形自身」は普遍的なものであって，物質の個性は少数の物性パラメータを通してのみ現れることを示唆している．つまり，構成方程式の中には，その「普遍的な形」に加えて,「物性情報」という物質の個性を反映するパラメータが含まれている．具体的には，圧力 p やずれ粘性 η，体積粘性 ζ，電荷伝導度 σ などの輸送係数 $L = \{\eta, \zeta, \sigma, \cdots\}$ の保存量密度依存性：

$$\text{物性情報：}\quad \text{状態方程式 } p = p(\mathcal{J}^{0}_{a}), \quad \text{輸送係数の値 } L = L(\mathcal{J}^{0}_{a}) \tag{3}$$

がそのような物性情報を与えている．以上の「構成方程式の形+物性情報」という情報をマクロ保存則に合わせると，解くことができる流体方程式系を与える．このように，**マクロ保存則，構成方程式，物性情報の 3 つが流体力学の理論構造の基礎**を与えている．

「流体力学の導出」という問題

以上の理解に基づくと ,「流体力学を導出する」という問題は次のように定式化できる：

問 [場の量子論に基づいた流体導出]： 考えている量子多体系が時空並進対称性や内部対称性などを持ち，マクロ保存則 (1) と対応する演算子恒等式が成立するときを考える．このとき，**場の量子論による記述に基づいて**，構成方程式の普遍的な形 (2) を導出し，そこに含まれる物質の個性を表す物性パラメータ (3) を計算する方法を明らかにせよ．

さて，ここまで，保存則や保存カレントについて「ある種のマクロ平均を取る」と宣言してきたが，場の量子論による記述に基づいて流体方程式を導出するためには，その意味を明確にす

[3]流体力学における力学変数は保存量密度のみであるため，時間の添字 ($\mu = 0$) と空間の添字 ($\mu = i$) が区別されることになる．しかし，曲がった時空の手法 (時空の ADM 分解) を用いて，$\mu = 0$ と $\mu = i$ の添字が明示的には現れないように議論を進めることもできる．詳細は文献 [1,2] を参照．

る必要がある．そこで以下のように考えて，その意味を制限してみよう．

一般の非平衡状態にある量子多体系の時間発展を調べるのは大変むずかしい．しかしながら，非平衡状態にある系の時間発展を考えると，ある程度時間が経った後には緩和時間が長いモードのみが生き残っていることが期待される．とくに，長波長 (マクロ) 極限を取った際に，ギャップレスモードとなるものがそのようなモードの例を与える．対称性に起因して一般に現れるギャップレスモードとして，保存量密度，対称性の自発的破れに伴う Nambu-Goldstone モード，ゲージ場 (磁場など)，2 次相転移近傍の臨界揺らぎなどの自由度が挙げられる．そこで，最も単純な設定として，保存量密度のみがギャップレスモードとして存在する場合を考えると，任意の非平衡状態から時間発展させて，時間がある程度経った後の系のマクロなダイナミクスは保存量密度のみによってコントロールされていると考えられる．以下，このような場合を考えていく．

ある時刻 t において,「保存量密度の平均値」が定まった状態として**局所熱平衡状態**を考えてみよう．そのような状態は，保存量密度に共役な局所熱力学変数 $\lambda_t \equiv \lambda^a(t,\boldsymbol{x}) = \{\beta^\mu(t,\boldsymbol{x}), \nu(t,\boldsymbol{x})\}$ (局所的な温度，流速，化学ポテンシャルに対応) を用いてパラメトライズでき，量子状態を記述する密度演算子について**局所ギブス分布**：

$$\hat{\rho}_{\mathrm{LG}}[\lambda_t;t] = \exp\left(-\hat{S}[\lambda_t;t]\right) \quad \text{with} \quad \hat{S}[\lambda_t;t] \equiv \hat{K}[\lambda_t;t] + \Psi[\lambda_t;t] \tag{4}$$

を仮定することで記述される．ここで，$\hat{K}[\lambda_t;t]$ は

$$\hat{K}[\lambda_t;t] \equiv \int \mathrm{d}^{d-1}x \hat{\mathcal{J}}^0_{\ a}(t,\boldsymbol{x})\lambda^a(t,\boldsymbol{x}) = \int \mathrm{d}^{d-1}x \left(\hat{T}^0_{\ \nu}\beta^\nu + \nu \hat{J}^0\right) \tag{5}$$

と定義され ($d-1$ は空間次元)，a や ν などについて同じ添え字が上下に現れた場合には和を取ることにした．パラメータの引数 λ_t は局所熱力学変数の配位を表し，時間の引数 t は演算子の引数を表している．確率分布の規格化を与える $\Psi[\lambda;t]$ は

$$\Psi[\lambda;t] \equiv \log \mathrm{Tr} \exp\big(-\hat{K}[\lambda;t]\big) \tag{6}$$

と定義され，**Massieu-Planck 汎関数**と呼ばれる局所熱平衡系の熱力学ポテンシャルを与える[4]．ここで，$\langle \hat{\mathcal{O}} \rangle^{\mathrm{LG}}_{\lambda_t} \equiv \mathrm{Tr}\left(\hat{\rho}_{\mathrm{LG}}[\lambda_t;t]\hat{\mathcal{O}}\right)$ と定義すると，局所熱力学パラメータ $\lambda^a(t,\boldsymbol{x})$ と局所平衡状態における保存量密度の期待値 $\langle \hat{\mathcal{J}}^0_{\ a}(t,\boldsymbol{x})\rangle^{\mathrm{LG}}_{\lambda_t}$ の間には一対一対応の関係があることを注意しておこう[5]．

さて，保存量密度以外の自由度が緩和しきった時刻を t_0 として，**「初期時刻 t_0 で局所熱力学変数の配位が λ_{t_0} で与えられる局所熱平衡状態が実現した」**と仮定してみよう．Heisenberg 描像を用いることにすると，あらゆる物理量 $\hat{\mathcal{O}}(t)$ の期待値は

$$\langle \hat{\mathcal{O}}(t) \rangle = \mathrm{Tr}\left(\hat{\rho}_0 \hat{\mathcal{O}}(t)\right) \quad \text{with} \quad \hat{\rho}_0 = \hat{\rho}_{\mathrm{LG}}[\lambda_{t_0};t_0] \tag{7}$$

と計算されることになる．これを「マクロ平均」の定義とする．すると，問題は次のように変形されたものになる．

> <u>問</u>′ [場の量子論に基づいた流体導出]： <u>問</u>と同じ設定のもと，初期密度演算子を局所ギブス分布に取る．このとき，式 (7) に基づいて $\langle \hat{\mathcal{J}}^i_{\ a}(t,\boldsymbol{x})\rangle$ を $\langle \hat{\mathcal{J}}^0_{\ a}(t,\boldsymbol{x})\rangle$ によって表す方法を与えよ．

問題が定式化されたので，以下の節でこの問に対する 1 つの解答 [1,2] を示す．

---

[4] 局所ギブス分布は保存量密度の期待値を固定するような拘束条件のもとで，情報エントロピーを最大化するような確率分布を与えており，パラメータ λ^a は保存量密度の期待値を固定するための Lagrange 未定乗数と理解できる ([2, 21–24] などを参照)

[5] ただし，一次相転移がある場合には注意が必要で，相境界の位置に関する情報がさらに必要になる．このような 2 相共存系を局所ギブス分布を用いて記述する方法は明らかになっていないように思う．

3　導出 前編：散逸的な輸送現象の導出

問題点とその解決法：最適化された (くりこまれた) 摂動論

問$'$ を解くために，$\langle \hat{\mathcal{J}}^i_a(t,\boldsymbol{x})\rangle$ を評価することを考える．これは，時刻 $t(>t_0)$ のエネルギー・運動量テンソルやカレントの期待値を表しているので，直感的には，その時刻 t における局所温度などの熱力学パラメータで表されるべきように思われる．しかしながら，期待値の定義に使われている密度演算子は，初期時刻 t_0 の熱力学パラメータ λ_{t_0} のみでパラメトライズされており，どこにも時刻 t における熱力学パラメータなどは現れていない．また，もし $\langle \hat{\mathcal{J}}^i_a(t,\boldsymbol{x})\rangle$ を評価できたとして，これをナイーブに時刻 t_0 のパラメータで表したとしても，それは非局所的な表式になるなど，極めて複雑なものになってしまうことが予想されるため，うまい定式化が必要になる．

以上の議論は「ある程度時間が経った $t(>t_0)$ における状態は，その時刻における新しい熱力学パラメータ λ_t の配位で特徴づけられる局所熱平衡状態に十分近いだろう」という自然な直感に基づいている．そこで，この自然な直感に基づいて，密度演算子 $\hat{\rho}_0=\mathrm{e}^{-\hat{S}[\lambda_{t_0};t_0]}$ に対して，次のような恒等変形を施してみよう：

$$\hat{\rho}_0=\exp\left(-\hat{S}[\lambda_t;t]+\hat{\Sigma}[t,t_0;\lambda]\right)=\hat{\rho}_{\mathrm{LG}}[\lambda_t;t]T_\tau\exp\left(\int_0^1 \mathrm{d}\tau\hat{\Sigma}_\tau[t,t_0;\lambda]\right) \tag{8}$$

ここで，エントロピー生成演算子 $\hat{\Sigma}_\tau[t,t_0;\lambda]$ は次式で定義される．

$$\hat{\Sigma}_\tau[t,t_0;\lambda]\equiv \mathrm{e}^{\tau\hat{S}[\lambda_t;t]}\hat{\Sigma}[t,t_0;\lambda]\mathrm{e}^{-\tau\hat{S}[\lambda_t;t]}\quad\text{with}\quad \hat{\Sigma}[t,t_0;\lambda]\equiv\hat{S}[\lambda_t;t]-\hat{S}[\lambda_{t_0};t_0] \tag{9}$$

ひとつめの等式では $\hat{S}[\lambda_t;t]$ を指数の上で足し引きし，ふたつめの等式では量子論の摂動論で相互作用描像に移るためによく用いられる指数関数演算子の公式を用い，新しい時刻 t の局所ギブス分布が $\hat{\rho}_{\mathrm{LG}}[\lambda_t;t]=\mathrm{e}^{-\hat{S}[\lambda_t;t]}$ と与えられることを用いた．この変形により，もし $\hat{\Sigma}[t,t_0;\lambda]$ が何らかの意味で小さいならば，密度演算子を「考えている時刻 t における局所熱平衡状態 + そこからの小さなズレ」という形に摂動展開の組み替えが行われたことになる．ここで，カレント演算子の「ズレ」を表すために，$\delta\hat{\mathcal{J}}^\mu_a(t,\boldsymbol{x})\equiv\hat{\mathcal{J}}^\mu_a(t,\boldsymbol{x})-\langle\hat{\mathcal{J}}^\mu_a(t,\boldsymbol{x})\rangle^{\mathrm{LG}}_{\lambda_t}$ を定義しておこう．

ここまでの議論では足し引きした λ_t(新しい時刻の局所熱力学パラメータ) が任意のままなので，これを定める条件を置かないと変形が一意に定まらない．いま，流体力学では保存量密度の時間発展に興味があるので，λ_t を定めるために，保存量密度の期待値の「ズレ」がなくなるという条件式：

$$\langle\delta\hat{\mathcal{J}}^0_a(t,\boldsymbol{x})\rangle=0\quad\Leftrightarrow\quad\langle\hat{\mathcal{J}}^0_a(t,\boldsymbol{x})\rangle=\langle\hat{\mathcal{J}}^0_a(t,\boldsymbol{x})\rangle^{\mathrm{LG}}_{\lambda_t} \tag{10}$$

を用いることにしよう．この式は「その時刻の保存量密度の期待値から，局所的な熱力学関係式を用いて温度などの熱力学パラメータを定める」ということを意味しており，非常に自然なものになっている．この条件によって，新しく導入したパラメータ λ_t の定義が定まり，$\langle\hat{\mathcal{J}}^i_a(t,\boldsymbol{x})\rangle$ を評価し，構成方程式を導出する下地が整った[6]．以上のような手法は，場の理論の文脈で**最適化された摂動論 (Optimized perturbation theory, OPT)**—あるいは**くりこまれた摂動論 (Renormalized perturbation theory, RPT)**—などと呼ばれているものとして理解できる[7]．

---

[6] 以上の変形は依然として恒等変形であるため，もし厳密に $\langle\hat{\mathcal{J}}^\mu_a(t,\boldsymbol{x})\rangle$ が評価できたとしたら，それは勝手に導入したパラメータ λ_t には依存しない．しかしながら，そのような厳密計算はほとんど不可能であり，以下に述べるように近似を施すことにより，$\langle\hat{\mathcal{J}}^\mu_a(t,\boldsymbol{x})\rangle$ は我々が導入したパラメータ λ_t に依存するようになる．

[7] 式 (10) は最適化された摂動論の文脈で **Fastest Apparent Convergence** 条件と呼ばれるものに対応している [25].

構成方程式の散逸部分と Green-Kubo 公式の導出

OPT(RPT) として定式化された以上の展開法は「$\hat{\Sigma}[t,t_0;\lambda]$ に関する摂動展開」という構造を持っているため，これが何らかの意味で小さくないと摂動展開が正当化できない．いま，式 (9) の定義を思い出すと，$\hat{\Sigma}[t,t_0;\lambda]=\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t'\partial_{t'}\hat{S}[\lambda_t;t']$ と表されるので，この被積分関数について，保存則と流体方程式などを用いて (かなりしんどい) 変形を行っていくと最終的に，

$$\boxed{\hat{\Sigma}[t,t_0;\lambda]=-\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t'\int \mathrm{d}^{d-1}x'\left[\hat{\mathcal{Q}}\delta\hat{\mathcal{J}}^i_{\ a}(t',\boldsymbol{x}')\partial'_i\lambda^a(t',\boldsymbol{x}')+O(\partial^2)\right]} \tag{11}$$

というコンパクトな表式を得ることができる．ここで，$\hat{\mathcal{Q}}\equiv 1-\hat{\mathcal{P}}$ として，射影演算子を

$$\hat{\mathcal{P}}\hat{\mathcal{O}}(t)\equiv\int \mathrm{d}^{d-1}x\int \mathrm{d}^{d-1}x'\delta\hat{\mathcal{J}}^0_{\ a}(t,\boldsymbol{x})\chi^{ab}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}';t)(\delta\hat{\mathcal{J}}^0_{\ b}(t,\boldsymbol{x}'),\hat{\mathcal{O}}(t))_t \tag{12}$$

と定義した．$\hat{\mathcal{P}}$ を引く部分は，マクロ保存則を用いて $\hat{\Sigma}[t,t_0;\lambda]$ に含まれるパラメータの時間微分 $\partial_t\lambda^a$ を消去する過程で現れた[8]．ここで，Kubo-Mori-Bogoliubov 内積 $(A,B)_t$ は

$$(A,B)_t\equiv\int_0^1 \mathrm{d}\tau\langle \mathrm{e}^{\hat{S}[\lambda_t;t]\tau}\hat{A}\mathrm{e}^{-\hat{S}[\lambda_t;t]\tau}\hat{B}^\dagger\rangle^{\mathrm{LG}}_{\lambda_t} \tag{13}$$

で与えられ，逆感受率 $\chi^{ab}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}';t)$ を次のように定義した：

$$\chi^{ab}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',t)=(\delta\hat{\mathcal{J}}^0_{\ a}(t,\boldsymbol{x}),\delta\hat{\mathcal{J}}^0_{\ b}(t,\boldsymbol{x}'))^{-1}_t \tag{14}$$

得られた式 (11) がパラメータの空間微分 $\partial'_i\lambda^a(t'.\boldsymbol{x}')$ に比例しているという点に注目してほしい．流体力学が適用できるような状況では局所温度などのパラメータ λ^a の変調が十分緩やかであり，これらの微分は小さな数を出すと考えられる．この**微分展開可能性**を仮定すると，

「$\hat{\Sigma}[t,t_0;\lambda]$ に関する摂動展開」＝「局所熱力学パラメータに関する微分展開」

となり，確かに微分展開の意味で $\hat{\Sigma}[t,t_0;\lambda]$ の展開が正当化できることがわかる．

以上で，散逸的な輸送現象を導出する準備が済んだので，微分展開に基づいて，具体的に $\langle\hat{\mathcal{J}}^i_{\ a}(t,\boldsymbol{x})\rangle$ を評価をしてみよう．そのためには，式 (8) の最右辺の指数部分をエントロピー生成 $\hat{\Sigma}[t,t_0;\lambda]$ に関して展開すればよく，微分展開の 1 次までで

$$\begin{aligned}\langle\hat{\mathcal{J}}^i_{\ a}(t,\boldsymbol{x})\rangle&=\left\langle T_\tau \mathrm{e}^{\int_0^1\mathrm{d}\tau\hat{\Sigma}_\tau[t,t_0;\lambda]}\hat{\mathcal{J}}^i_{\ a}(t,\boldsymbol{x})\right\rangle^{\mathrm{LG}}_{\lambda_t}\\&=\langle\hat{\mathcal{J}}^i_{\ a}(t,\boldsymbol{x})\rangle^{\mathrm{LG}}_{\lambda_t}+\int_0^1\mathrm{d}\tau\langle\hat{\Sigma}_\tau[t,t_0;\lambda]\hat{\mathcal{J}}^i_{\ a}(t,\boldsymbol{x})\rangle^{\mathrm{LG}}_{\lambda_t}+O(\partial^2)\end{aligned} \tag{15}$$

という結果を得る．ここで，$\langle\hat{\mathcal{O}}\rangle^{\mathrm{LG}}_{\lambda_t}\equiv\mathrm{Tr}\left(\hat{\rho}_{\mathrm{LG}}[\lambda_t;t]\hat{\mathcal{O}}\right)$ を思い出すと右辺第 1 項がその時刻の局所ギブス分布による平均を，第 2 項はそこからの「ズレ」を表しているとわかる．さて，エントロピー生成演算子 $\hat{\Sigma}[t,t_0;\lambda]$ は既に式 (11) で与えられていたことを思い出して，右辺第 2 項を整理すると

$$\begin{aligned}\langle\delta\hat{\mathcal{J}}^i_{\ a}(t,\boldsymbol{x})\rangle&=-\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t'\int\mathrm{d}^{d-1}x'(\hat{\mathcal{Q}}\delta\hat{\mathcal{J}}^i_{\ a}(t,\boldsymbol{x}),\hat{\mathcal{Q}}\delta\hat{\mathcal{J}}^j_{\ b}(t',\boldsymbol{x}'))_t\partial'_j\lambda^b(t',\boldsymbol{x}')+O(\partial^2)\\&\simeq-\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t'\int\mathrm{d}^{d-1}x'(\hat{\mathcal{Q}}\delta\hat{\mathcal{J}}^i_{\ a}(t,\boldsymbol{x}),\hat{\mathcal{Q}}\delta\hat{\mathcal{J}}^j_{\ b}(t',\boldsymbol{x}'))_t\partial_j\lambda^b(t,\boldsymbol{x})+O(\partial^2)\end{aligned} \tag{16}$$

[8]射影演算子 $\hat{\mathcal{P}}$ はギャップレスの流体モードを相関関数から取り除くために必要である (射影演算子を含まない場合，相関関数に流体モードが寄与することで Green-Kubo 公式の計算が発散してしまう)．とくに体積粘性 ζ の Green-Kubo 公式について，このようなミスが含まれた久保公式を与えている文献が多いので，注意が必要である．

を得る．2 行目に移る際に，流体力学で議論する時空間スケールが相関関数の減衰する時空間スケールより十分長く取れること (スケール分離) を仮定して，パラメータの微分を $\partial'_j\lambda^b(t',\boldsymbol{x}') \to \partial_j\lambda^b(t,\boldsymbol{x})$ と置き換える近似を行った[9]．得られた結果をまとめると，

散逸的な輸送現象を記述する構成方程式と輸送係数の Green-Kubo 公式：

$$\langle\delta\hat{\mathcal{J}}^i{}_a(t,\boldsymbol{x})\rangle = -\frac{1}{\beta(t,\boldsymbol{x})}L^{ij}_{ab}(t,\boldsymbol{x})\partial_j\lambda^b(t,\boldsymbol{x}) + O(\partial^2) \tag{17}$$

$$L^{ij}_{ab}(t,\boldsymbol{x}) = \beta(t,\boldsymbol{x})\int_{-\infty}^{t}\mathrm{d}t'\int\mathrm{d}^{d-1}x'\,\boldsymbol{(}\hat{\mathcal{Q}}\delta\hat{\mathcal{J}}^i{}_a(t,\boldsymbol{x}),\hat{\mathcal{Q}}\delta\hat{\mathcal{J}}^j{}_b(t',\boldsymbol{x}')\boldsymbol{)}_t \tag{18}$$

となる ($\beta(t,\boldsymbol{x}) \equiv \sqrt{-\beta^\mu(t,\boldsymbol{x})\beta_\mu(t,\boldsymbol{x})}$ のファクターは慣用にならった)．これらは，局所熱力学パラメータの空間勾配 $\partial_j\lambda^b$ に応答して輸送係数 L^{ij}_{ab} に比例した散逸的な輸送現象が生じること (17)，ならびに輸送係数 L^{ij}_{ab} が Green-Kubo 公式 [26–28] から求められること (18)，を示している．いま，式 (10) によって，$\lambda^a(t,\boldsymbol{x})$ と $\langle\hat{\mathcal{J}}^0{}_a(t,\boldsymbol{x})\rangle$ が一対一対応していることを思い出すと，式 (17) は確かに保存カレント $\langle\hat{\mathcal{J}}^i{}_a(t,\boldsymbol{x})\rangle$ を保存量密度 $\langle\hat{\mathcal{J}}^0{}_a(t,\boldsymbol{x})\rangle$ によって表す構成方程式を与えているとわかる．L^{ij}_{ab} は λ^a の勾配に対してどれだけカレントが流れやすいかを表しているが，考えている物理系に対して式 (18) を評価すれば，この具体的な値を (原理的には) 求められる．これはまさしく「普遍的な構成方式の形 + 物性情報」を両方とも与える結果に他ならない[10]．したがって,「流体方程式を導出できた！」と宣言したくなるが，ここまででではまだ半答程度の答案である．というのも，式 (15) の展開において，第 1 項に関する情報がまだ何も導出されていないからだ．

4　導出 後編：局所熱平衡状態の輸送現象 ＝ 曲がった "時空" 中の量子論

残る問題は局所熱平衡状態における期待値 $\langle\hat{\mathcal{J}}^i{}_a(t,\boldsymbol{x})\rangle^{\mathrm{LG}}_{\lambda_t}$ を評価し，これを $\lambda^a(t,\boldsymbol{x})$ で表すことである (以下 $x=(t,\boldsymbol{x})$ と略記)．ここで，各成分をそれぞれ評価することなく，これらを一網打尽に評価する方法がある．鍵になるのは，局所熱平衡系の熱力学ポテンシャルとして式 (6) で導入された Massieu-Planck 汎関数 $\Psi[\lambda_t]$ である．

Massieu-Planck 汎関数の変分公式

Massieu-Planck 汎関数 $\Psi[\lambda_t]$ から $\langle\hat{\mathcal{J}}^i{}_a(x)\rangle^{\mathrm{LG}}_{\lambda_t}$ の情報を引き出すために，背景計量 $g_{\mu\nu}$ と背景ゲージ場 A_μ を導入してみよう (まとめて $j\equiv\{g_{\mu\nu},A_\mu\}$ と書く)．このとき，(量子異常がなければ) もともと作用が持っていた大域対称性は，一般座標変換不変性やゲージ不変性という局所的なものに格上げされる．一般相対論や場の理論の授業で学ぶように，これらの背景場に対する (ミクロな理論の) 作用の変分は

$$\hat{T}^{\mu\nu}(x) = \frac{2}{\sqrt{-g(x)}}\frac{\delta\mathcal{S}[\varphi;j]}{\delta g_{\mu\nu}(x)},\quad \hat{J}^\mu(x) = \frac{1}{\sqrt{-g(x)}}\frac{\delta\mathcal{S}[\varphi;j]}{\delta A_\mu(x)} \tag{19}$$

---

[9] この近似が本当によいどうかは，より詳細に調べるべき問題である．実際，現象論的に流体中の非線形揺らぎを取り入れた計算では，$1+1$ 次元系などの低次元系でこの近似が破綻しうることが知られている．

[10] 構成方程式や輸送係数に関する Green-Kubo 公式をまとめた形で表したが，テンソル分解を施して具体的に書き下すと，式 (17)-(18) は，体積粘性 ζ，ずれ粘性 η，電荷伝導度 σ に比例する散逸的な輸送現象を記述する構成方程式と Green-Kubo 公式を確かに与えていることがわかる．その具体的な形は [1] を参照．

とエネルギー・運動量テンソルやゲージカレントの定義を与える[11]．さて，いま問題にしている Massieu-Planck 汎関数 $\Psi[\lambda_t]$ も，実は背景場 j を導入した際に局所変換に対する不変性を持つことが示される．導出は省略するが，この局所不変性を用いると

$$\langle \hat{T}^{\mu\nu}(x)\rangle^{\mathrm{LG}}_{\lambda_t} = \frac{2}{\beta^0\sqrt{-g}}\frac{\delta\Psi[\lambda_t, j]}{\delta g_{\mu\nu}(x)}, \quad \langle \hat{J}^{\mu}(x)\rangle^{\mathrm{LG}}_{\lambda_t} = \frac{2}{\beta^0\sqrt{-g}}\left(\frac{\delta\Psi[\lambda_t, j]}{\delta\nu(x)}\beta^\mu(x) + \frac{\delta\Psi[\lambda_t]}{\delta A_\mu(x)}\right), \quad (21)$$

という変分公式 (β^0 は β^μ のゼロ成分) が導出できる (詳細は文献 [2–4] を参照)．この式から，**Massieu-Planck 汎関数の変分を取ることで局所ギブス分布に関するカレントの期待値** $\langle \hat{\mathcal{J}}^i{}_a(t,\boldsymbol{x})\rangle^{\mathrm{LG}}_{\lambda_t}$ **がすべて求まる**ことがわかる．よって，Massieu-Planck 汎関数がどう与えられるかという問題に集中すればよい．

Massieu-Planck 汎関数の経路積分公式

Massieu-Planck 汎関数の定義は式 (6) で与えられている．大域的な熱平衡状態にあるときのグランドポテンシャル $\log Z(\beta,\mu) \equiv \mathrm{Tr}\, \mathrm{e}^{-\beta(\hat{H}-\mu\hat{N})}$ と比べると，指数の肩が $-\hat{K}[\lambda_t; t]$ と複雑にはなってはいるが，現れる演算子はすべてわかっている．したがって，大域熱平衡状態のときと同様に，$\Psi[\lambda_t]$ に対してコヒーレント状態を用いた経路積分公式を書き下すことができる．

具体的に，実スカラー場，複素スカラー場，ダイナミカルな可換・非可換ゲージ場，Dirac 場の場合について，$\Psi[\lambda, j]$ に対する経路積分公式を事例研究的に求めていった結果，次のことがわかった [1,2]：

Massieu-Planck 汎関数の経路積分公式：

$$\Psi[\lambda, j] = \log\int \mathcal{D}\varphi\, \mathrm{e}^{\widetilde{S}[\varphi;\lambda]} \quad \text{with} \quad \widetilde{S}[\varphi;\lambda] = \int_0^{\beta_{\mathrm{ref}}} \mathrm{d}\tau \int \mathrm{d}^{d-1}x\sqrt{-\widetilde{g}}\mathcal{L}(\varphi, \widetilde{D}_\mu\varphi; \widetilde{j}) \quad (22)$$

ここで，φ は考えている系のミクロな自由度を表す．局所熱力学パラメータ λ^a に関する非一様性の情報は，曲がった背景時空と背景ゲージ場 $\widetilde{j}$ によって表され，$\mathrm{d}\widetilde{t} \equiv -\mathrm{i}\mathrm{d}\tau$ として，それぞれ

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\widetilde{s}^2 &= -\mathrm{e}^{2\sigma}\big(\mathrm{d}\widetilde{t} + a_i \mathrm{d}x^i\big)^2 + \gamma'_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j \\ \widetilde{A} &= \mathrm{e}^\sigma\mu\big(\mathrm{d}\widetilde{t} + a_i\mathrm{d}x^i\big) + A'_i\mathrm{d}x^i \end{aligned} \quad (23)$$

と与えられる．局所温度や流速を用いて，$\mathrm{e}^{\sigma(x)} \equiv \beta(x)/\beta_{\mathrm{ref}}$，$a_i(x) \equiv \mathrm{e}^{-\sigma}u_i$，$\mu(x) \equiv \nu(x)/\beta(x)$，$\gamma'_{ij} \equiv \gamma_{ij} + u_i u_j$，$A'_i = A_i - \mathrm{e}^\sigma\mu a_i$ などの量を定義した (β_{ref} は任意に取れる参照逆温度，γ_{ij} はもともとの時空の空間方向の計量)．これらは近似なしに成立する厳密な結果である．

もともとの時空が平らであったとしても，局所熱力学パラメータの非一様性に起因して，虚時間方向には

$$\text{熱的計量：}\quad \widetilde{g}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\mathrm{e}^{2\sigma} & \mathrm{e}^\sigma u_j \\ \mathrm{e}^\sigma u_i & \gamma_{ij}\end{pmatrix}, \quad \text{ゲージ場：}\quad \widetilde{A}_\mu \equiv (\mathrm{e}^\sigma\mu, A_i) \quad (24)$$

で定まる曲がった時空+背景ゲージ場が現れていることに注意してほしい．絵的にこれを表したものが Fig. 1 である．つまり，Massieu-Planck 汎関数を求めるには「熱的に曲がった背景時空の

[11] 作用が局所的な変換に対して不変となっていることから，共変的な保存則：

$$\nabla_\mu \hat{T}^\mu{}_\nu = F_{\nu\mu}\hat{J}^\mu, \quad \nabla_\mu\hat{J}^\mu = 0 \quad (20)$$

が得られる．背景ゲージ場の存在に起因したローレンツ力などのために，保存則はソース項を持つが，これらを考慮すると背景電場に起因する伝導電流などがまとめて導出される．

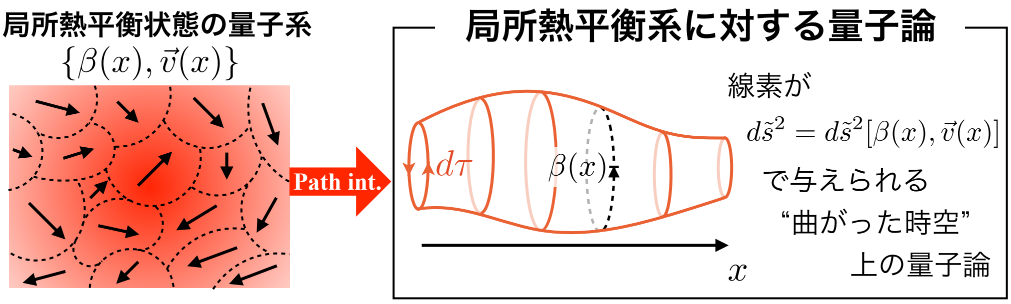

Figure 1: 局所熱平衡状態にある量子系の分配汎関数は曲がった時空中の経路積分で表される．

上で経路積分を実行すればよい」ということがわかる．この結果は，熱平衡状態にある量子系を経路積分によって取り扱う**虚時間形式 (松原) 形式の量子論** [29,30] を，局所熱平衡状態へ一般化したものとして理解できる．

経路積分を実行した結果，Massieu-Planck 汎関数は $\tilde{g}_{\mu\nu}$ や $\tilde{A}_\mu$ などを用いて表されるはずであるが，これは実際に実行するのは，とてもむずかしい問題である．しかし，対称性を利用して可能な形を制限することは簡単にできる．大事なのは，背景場 $\tilde{j} \equiv \{\tilde{g}_{\mu\nu}, \tilde{A}_\mu\}$ のために，作用は局所不変性を有するように表されていることと，時空は虚時間方向に S^1 コンパクト化されているが，背景場 $\tilde{j}$ は虚時間依存性を持たないことである．したがって，Massieu-Planck 汎関数もこれらの局所不変性などを満たすように表されるはずなので，これらの不変性を満たす量を背景場 $\tilde{j}$ の中から抽出する必要がある．

不変量の 1 つの構成法は，局所不変性をそのまま使うことである．いま，$\tilde{g}_{\mu\nu}$ や $\tilde{A}_\mu$ で一般座標変換不変性とゲージ不変性を満たすスカラー量を構成しようとすると，(熱的)Ricci スカラー $\tilde{R}$ や場の強さのテンソルの二乗 $(\mathrm{d}\tilde{A})^2$ などが思い浮かぶ．しかしながら，虚時間方向に S^1 コンパクト化されていることに注意すると

$$\oint_{S^1} \mathrm{d}\tilde{s} \quad \text{and} \quad \oint_{S^1} \mathrm{d}\tilde{A} \tag{25}$$

というループ積分も不変であることに気づく．ここで，熱力学パラメータの空間座標依存性が緩やかであることを仮定して微分展開を用いると，式 (25) が最低次の不変量を与えるとわかる．これらは，式 (23) から局所温度 $\beta(x)$ と局所化学ポテンシャル $\mu(x)$ に他ならない．

不変量のもう 1 つの構成法は，局所不変性を虚時間と空間に分解して用いることである．これを見るために，背景場 $\tilde{j} \equiv \{\tilde{g}_{\mu\nu}, \tilde{A}_\mu\}$ が虚時間依存性を持たないことに注目しよう．このことに起因して，虚時間の原点を空間座標に依存させてずらすと同時に a_i を変換するという

$$\begin{cases} \tilde{t} \to \tilde{t} - \chi(\boldsymbol{x}) \\ \boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x} \\ a_i(\boldsymbol{x}) \to a_i + \partial_i \chi(\boldsymbol{x}) \end{cases} \tag{26}$$

を考えると，$\mathrm{d}\tilde{t} + a_i \mathrm{d}x^i$ という組み合わせは不変に保たれているため，Massieu-Planck 汎関数もこの局所変換に対する不変性を持つことがわかる．これは素粒子・宇宙論の文脈でいう **Kaluza-Klein ゲージ変換**に他ならず，a_i は **Kaluza-Klein ゲージ場**だと理解できる．したがって，a_i は ($f_{ij} \equiv \partial_i a_j - \partial_j a_i$ などの) Kaluza-Klein ゲージ不変な組でしか現れられず，微分をひとつも持たない不変量を組めないことがわかる．一方で，式 (23) の $\mathrm{d}\tilde{s}^2$ や $\tilde{A}$ に現れている $\mathrm{e}^{2\sigma}$ や $\mathrm{e}^{\sigma}\mu$ は Kaluza-Klein ゲージ不変な量になっている．さらに，空間座標変換に対してもこれらはスカ

ラー量になっている．したがって，微分展開の最低次で現れる不変なスカラー量は結局，局所温度 $\beta(x)$ と局所化学ポテンシャル $\mu(x)$ になることがわかる．

以上で求まった不変量を用いて，Massieu-Planck 汎関数の一般形を微分展開の 1 次の範囲で求めてみよう．微分展開の最低次として，不変なスカラー量 β と μ の任意関数が許される．この関数系を $p(\beta,\mu)$ と書くことにしよう．次に，考えている物理系がパリティ対称性を有するときを考えると，空間微分を 1 つだけ含むパリティ不変なスカラー量は作れないため，微分の 1 次補正は現れないことがわかる．したがって，Massieu-Planck 汎関数を微分展開したときの一般形が

$$\Psi[\lambda,j]=\int_0^{\beta_{\mathrm{ref}}}\mathrm{d}\tau\int\mathrm{d}^{d-1}x\sqrt{-\tilde{g}}p(\beta,\mu)+O(\partial^2) \tag{27}$$

と与えられることがわかる．ここで，$p(\beta,\mu)$ は局所温度・局所化学ポテンシャルに依存する任意関数である．これで Massieu-Planck 汎関数の形がわかったため，変分を取ることで局所ギブス分布に関するカレントの期待値が求められる．結果をまとめると以下の通り：

局所熱平衡系の輸送現象を記述する構成方程式と状態方程式の経路積分公式：

$$\langle\hat{T}^{\mu\nu}(x)\rangle_{\lambda_t}^{\mathrm{LG}}=(e+p)u^\mu u^\nu+pg^{\mu\nu},\quad\langle\hat{J}^\mu(x)\rangle_{\lambda_t}^{\mathrm{LG}}=nu^\mu \tag{28}$$

$$\Psi[\lambda]=\int\mathrm{d}^{d-1}x\sqrt{\gamma}\beta p(\beta,\mu)+O(\partial^2) \tag{29}$$

ここで，e と n はそれぞれ，エネルギー密度・電荷密度を表している．応力テンソルの対角部分に p が現れていることから，Massieu-Planck 汎関数に現れた任意関数 $p(\beta,\mu)$ は流体の持つ圧力を表していたことがわかる．式 (28) はよく知られた**相対論的完全流体の構成方程式**に他ならない．以上の議論は対称性のみに基づいた結論であり．構成方程式の形は普遍的なものであることがわかる．物質の個性は，圧力 $p(\beta,\mu)$ の β,μ 依存性という形を通して現れており，経路積分 (22) を具体的に評価すれば (原理的には) 求められる．ここで，β や μ が保存量密度 $\langle\hat{\mathcal{J}}^0_a(x)\rangle$ と一対一対応の関係を持っていることを思い出すと，これは物性情報を指定する式 (3) に現れた状態方程式を与えているとわかる．

5 結語：まとめと展望

前節までで得られた結果をまとめよう．

問′への解答：微分展開の 1 次までで，普遍的な構成方程式の形は式 (28) と (17) を合わせたもので与えられる．物性情報は式 (29) と (18) を計算することで求められる．解答を得る過程で用いた仮定をまとめると，以下の通り；

- **(仮定 1: 特殊な初期条件)** 初期状態を局所熱平衡状態という特別な状態に選ぶ．
- **(仮定 2: スケール分離)** カレント相関関数のふるまいが (16) の 2 行目への変形を許す．
- **(仮定 3: 微分展開その 1)** 散逸補正を表す $\hat{\Sigma}[t,t_0;\lambda]$ に関する微分展開が可能．
- **(仮定 4: 微分展開その 2)** Massieu-Planck 汎関数が微分展開に基づいて求められる．

仮定に関しては，筆者の経験から外すのがむずかしいと思う順に並べた．これらの仮定のどれかを外すことができれば，それは「流体力学の導出」に関する研究のさらなる進展に繋がると思う．

以上，第 13 回 (2019 年) 日本物理学会若手奨励賞 (理論核物理領域) の受賞対象となった論文

の概要を最短経路で解説した[12]．現在の非平衡統計力学と場の量子論の知見に基づいて，ベストを尽くした「流体力学の導出」を与えたと自負しているが,「場の量子論から本当に流体力学が導出できたか?」と問われると，上の解答をもって躊躇せず「YES！」と答えられるほど楽観的な気持ちを筆者は持てていない．というのも，**(仮定 1)** に明示しておいたように，我々が解いたのは「初期状態に局所熱平衡状態を置く」という (いささか不自然で) 大きな仮定を置いて変形された<u>問</u>′ であり,「マクロ平均」に対する仮定を緩めたもとの<u>問</u>に対しては，いまのところ手も足も出せていないからだ．いささか悲観的に結果を述べると,「熱力学と合致するように平衡系の統計力学が構成された」のと同じように,「流体力学と合致するように局所熱平衡 $(+\alpha)$ の統計力学が構成された」と言うべきレベルだと思う．

とはいえ，局所熱平衡状態にある量子系について虚時間形式の拡張が定式化できたことなど，達成できたことも少なくない．実際，この手法に基づくと，**カイラル量子異常に起因して生じる輸送現象 (カイラル磁気効果やカイラル渦効果)** が系統的に理解できることなどが明らかになっている [4,12,13]．また，我々が導出した経路積分公式 (22)-(23) 自体は厳密な結果であり，局所熱平衡状態ではあっても，温度勾配などが小さくない状態も取り扱えるフォーマリズムになっている．そのため，特定の状況に限ってしまえば，曲がった時空中の場の理論の手法などを活用して，**(仮定 4)** を部分的に突破することが可能なように思える．もしそのようなことが遂行できれば，局所熱平衡状態にある流体に関して，微分展開に基づいては議論できない新奇な輸送現象を記述できるはずであり，おもしろいように思う．今後もさらなる流体力学研究の進展が続くことを期待したい．

謝辞

受賞対象となった研究 [1] は理化学研究所の日高 義将氏，早田 智也氏，神戸大学の野海 俊文氏との共同研究によるものです．とくに，日高 義将氏との議論はその後の研究 [2] を遂行するためにもなくてはならない非常に有用なものでした．また，初田 哲男氏が主導して整えられた，理化学研究所の「科学者の自由な楽園」的なすばらしい研究環境にも大変助けられました．この場を借りて感謝いたします．

References

[1] T. Hayata, Y. Hidaka, T. Noumi and M. Hongo, *Phys. Rev.* **D92** (2015) 065008.

[2] M. Hongo, *Annals Phys.* **383** (2017) 1.

[3] M. Hongo, *Journal of Statistical Physics* **174** (2019) 1038.

[4] M. Hongo and Y. Hidaka, *Particles* **2** (2019) 261.

[5] K. Yagi, T. Hatsuda and Y. Miake, *Quark-Gluon Plasma: From Big Bang to Little Bang*. Cambridge University Press, 2005.

[6] 原子核研究 *Vol.54 Supplement 3:* 流体特集号. 原子核研究編集委員会, 2010.

[7] P. Kovtun, D. T. Son and A. O. Starinets, *Phys. Rev. Lett.* **94** (2005) 111601.

[12] 最短経路からは外れるため本稿では触れなかったが，便利な座標系の選び方 (**Hydrostatic ゲージ**) や**局所熱平衡系に関する量子揺らぎの定理**などの議論も関連論文 [2–4] で議論しているので，興味がある方は参照してほしい．

[8] R. Baier, P. Romatschke, D. T. Son, A. O. Starinets and M. A. Stephanov, *JHEP* **04** (2008) 100.

[9] S. Bhattacharyya, V. E. Hubeny, S. Minwalla and M. Rangamani, *JHEP* **02** (2008) 045.

[10] D. T. Son and P. Surowka, *Phys. Rev. Lett.* **103** (2009) 191601.

[11] K. Landsteiner, E. Megias and F. Pena-Benitez, *Phys. Rev. Lett.* **107** (2011) 021601.

[12] N. Banerjee, J. Bhattacharya, S. Bhattacharyya, S. Jain and S. Minwalla, *JHEP* **1209** (2012) 046.

[13] K. Jensen, M. Kaminski, P. Kovtun, R. Meyer, A. Ritz and A. Yarom, *Phys. Rev. Lett.* **109** (2012) 101601.

[14] F. M. Haehl, R. Loganayagam and M. Rangamani, *JHEP* **05** (2015) 060.

[15] M. Crossley, P. Glorioso and H. Liu, *JHEP* **09** (2017) 095.

[16] P. Glorioso, M. Crossley and H. Liu, *JHEP* **09** (2017) 096.

[17] F. M. Haehl, R. Loganayagam and M. Rangamani, *JHEP* **10** (2018) 194.

[18] 日高 義将, 本郷 優, 数理科学 *2017*年 *7*月号 **No. 647** (2017) .

[19] S.-i. Sasa, *Phys. Rev. Lett.* **112** (2014) 100602.

[20] D. N. Zubarev, A. V. Prozorkevich and S. A. Smolyanskii, *Theor. Math. Phys.* **40** (1979) 821.

[21] Dmitrii N. Zubarev(著), 久保亮五・鈴木増雄・山崎義武 (訳), 非平衡統計熱力学 *(*上*)*. 丸善, 1976.

[22] Dmitrii N. Zubarev(著), 久保亮五・鈴木増雄・山崎義武 (訳), 非平衡統計熱力学 *(*下*)*. 丸善, 1977.

[23] D. N. Zubarev, V. Morozov and G. Ropke, *Statistical Mechanics of Nonequilibrium Processes, Volume 1: Basic Concepts, Kinetic Theory*. Wiley-VCH, 1 ed., 6, 1996.

[24] D. N. Zubarev, V. Morozov and G. Ropke, *Statistical Mechanics of Nonequilibrium Processes, Volume 2: Relaxation and Hydrodynamic Processes*. Wiley-VCH, 9, 1997.

[25] P. M. Stevenson, *Phys. Rev.* **D23** (1981) 2916.

[26] M. S. Green, *The Journal of Chemical Physics* **22** (1954) 398.

[27] H. Nakano, *Prog. Theor. Phys.* **15** (1956) 77.

[28] R. Kubo, *Journal of the Physical Society of Japan* **12** (1957) 570.

[29] T. Matsubara, *Prog. Theor. Phys.* **14** (1955) 351.

[30] A. A. Abrikosov, L. P. Gorkov and I. E. Dzyaloshinskii, *Sov. Phys. JETP* **9** (1959) 636.