

場の量子論と流体力学のつながり

日高 義将・本郷 優

1. 極微の世界のマクロな流れ？

我々の身近にある物質をミクロに見ていくとどうなるだろうか。連続的な表面を持っているように見える物質でも、ミクロに見ると原子や分子でできており、さらにミクロに見ていくと究極的には電子やクォークなどの素粒子でできている。このような「物質のミクロな記述」を追求した末に人類がたどり着いた現在の到達点が相対論的場の量子論（以下、場の量子論）という理論的枠組みである。場の量子論に基づいた標準模型という理論は、実験による詳細な検証に耐え、実に 10^{-18} m 程度の極小スケールにいたるまでの現象の記述に成功している。数年前に話題になった Higgs 粒子の発見はその成功の最たる例と言える。

さて、この成功華々しい標準模型の中に、量子色力学 (QCD) と呼ばれる理論がある。QCD が記述するのは主に原子核を構成する陽子や中性子の内部で生じる物理現象であり、その典型的な長さスケールは 10^{-15} m である。理論を構成しているのはクォークやグルーオンと呼ばれる量子場で記述される素粒子であり、これらが陽子や中性子のミクロな構成要素になっている。このような物質の極めてミクロな構造を記述する QCD が、驚くべきことに流体力学という「マクロな流れ」を記述する分野と関係するのである。

QCD で記述される陽子や中性子であるが、実は物質が陽子や中性子のような存在形態（総称し

てハドロンと呼ばれる) を取るのは「低い」温度においてのみである。物質の温度をあげていくと順次、固体は液体に、液体は気体に相転移を引き起こしていくが、さらに温度を上げると数万度で電子と原子核のイオンがバラバラになったプラズマ状態が実現する。そしてさらにずっと温度をあげていくと、原子核内の陽子や中性子を構成していたクォークやグルーオンがバラバラになった、クォーク・グルーオン・プラズマ (QGP) という物質状態が実現される。QGP 状態が実現する温度は数兆度という極めて高温であるが、それより温度が圧倒的に低いために我々の身近には陽子や中性子で構成された安定な物質が存在しているのである。

さて、実現不可能としか思えないこのような極限的な高温状態が、実は 2000 年代に入ってから地球上の実験で作られ続けている。その舞台となっているのが、アメリカ・ブルックヘブン国立研究所の相対論的重イオン衝突型加速器 (RHIC)、あるいはスイス・フランスにある欧州原子核研究機構 (CERN) の大型ハドロン衝突型加速器 (LHC) である。これらの実験ではほぼ光速まで加速させた高エネルギーの重イオン原子核を衝突させることで、一瞬間だけ超高温の QGP 状態を生成する。生成された QGP の大きさは 10^{-15} m 程度であり、 10^{-23} 秒程度ですぐに冷えてしまう。このような極微の物質状態は場の量子論で記述することが自然に思われるかもしれないが、強い相互作用を行なうクォーク・グルーオン多体系の非平衡状態を

扱うのは非常に困難である．ここで，マクロな流れを記述する流体力学が登場する．つまり，高エネルギーの重イオン衝突実験で実現する QGP は，相対論的に定式化された流体力学によってよく記述され，さらに驚くことに QGP の粘性（動粘性に対応する量）が，これまでに知られている物質の中で最も小さそうだということまでわかってきたのである．QGP の流体記述に関する上記の進展に加えて，純粹に理論的な進展として，ゲージ/重力対応^{*1)}の研究における流体/重力対応という「ゲージ理論の強結合に関する流体記述と，負の宇宙項を持つ 1 次元高いアインシュタイン重力理論の間の対応」が発見された¹⁾．流体方程式の相対論的な拡張は，既に半世紀以上も前に Eckart や Landau によって行われていたが，以上の事情があいまって 2000 年以降には相対論的流体力学の研究は非常に盛んになった．ここでは，流体力学という記述の理論的枠組みから始めて，そのミクロとの繋がりや最近の進展についてまとめる．

2. 流体方程式のプロトタイプ：拡散方程式

流体力学の基礎になっているのは保存則である．そこでまず，保存量が 1 つしかない最も簡単な流体力学のプロトタイプ（拡散方程式）を用いて，その理論的な枠組みを説明しよう．保存量密度を n ，付随するカレントを \vec{J} と書くと，保存則は

$$\partial_t n + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 \quad (1)$$

と書かれる．これを解いて，保存量密度 n の時間発展を記述するのが流体力学の目標である．しかし，この保存則だけでは運動方程式として解ける形になっていない．というのも， n の時間発展を計算しようにも，カレント \vec{J} が未知であるからだ．そのため，保存則を運動方程式として解けるようにするには，カレント \vec{J} を保存量密度 n を用いて表す必要がある．この関係式は現象論的には以下のように得られる．我々は経験的に「密度分布が

非一様な状況を実現させて放っておくと，最終的に一様になる」という事例を観測するが，これはカレント \vec{J} が保存量の非一様性を打ち消すように

$$\vec{J} = -D \vec{\nabla} n \quad (2)$$

という形を取るとすれば再現できる (Fick の法則)．ここで D というのは正の値を取り，物質ごとによって定まる「拡散のしやすさ」を表す物性パラメータである．以上の表式を保存則に用いると

$$\partial_t n = D \vec{\nabla}^2 n \quad (3)$$

となる．これは D の値がわかれば解くことができる方程式になっている．得られた方程式は拡散方程式と呼ばれる方程式で，最も簡単な流体方程式の例となっている．

3. 流体力学の理論的枠組み

「マクロな流れ」を記述する「流体力学」であるが，その理論的枠組みの構造はそもそもどうなっているのだろうか．既に拡散方程式で見たように，これは次のように与えられる：流体力学は保存則に基づいているが，保存則だけではその理論体系は閉じない．そのため，保存則に入っているカレントを保存量を用いて表す方程式（構成方程式と呼ばれる）が必要になる．さらにその方程式には考えている物質が何であるかを特徴付ける物性パラメータが含まれている．流体力学は以上の「保存則+構成方程式+物性情報」という 3 つの要素に支えられている．この 3 つを以下で説明していこう．保存則：考えている物理系が時間・空間方向への並進対称性と位相変換の対称性を持っていたとしよう．この物理系は以上の対称性を有しているならば，古典 N 粒子系であっても，クォークやグルーオンなどの量子場で記述される量子系であってもよい．すると，ネーターの定理により対称性に付随した保存量が存在する．この保存則を相対論的な記法を用いて表すと以下の通りになる：

$$\partial_\mu \hat{T}^{\mu\nu}(x) = 0, \quad \partial_\mu \hat{J}^\mu(x) = 0.$$

*1) 詳しくは，中村 真氏の記事「弦理論におけるミクロとマクロ」を参照．

いま μ, ν などのギリシャ文字は 0 から 3 まで走るものとし、上下で同じ添え字が現れた場合には和を取ることにした。以上の保存則は運動方程式を満たすならば、演算子 (古典論の場合は位相空間中の力学自由度) に関して恒等的に成り立っている。流体力学を議論する際に用いられるのは、この保存則で記述される「マクロ」な振る舞いである。ミクロな演算子に関して成立している以上の保存則に基づいて、マクロな振る舞いを記述したい。そこで、演算子に関する期待値を取った式：

$$\partial_\mu \langle \hat{T}^{\mu\nu}(x) \rangle = 0, \quad \partial_\mu \langle \hat{J}^\mu(x) \rangle = 0 \quad (4)$$

を考えよう。これが流体記述において保存量の時空発展を定める運動方程式になる。

構成方程式：すでに拡散方程式の例で見たように、保存則だけを知っていたとしてもそれは方程式として解ける形にはなっていない。そのために、エネルギー・運動量テンソルや 4 元電流の空間成分を、時間成分と結びつける関係式が必要になる。これが構成方程式と言われる式で、

$$\langle \hat{T}^{ij}(x) \rangle = T^{ij}[T^{0\nu}(x), J^0(x)], \quad (5)$$

$$\langle \hat{J}^i(x) \rangle = J^i[T^{0\nu}(x), J^0(x)] \quad (6)$$

と与えることができる。一旦この関係式が得られたら、保存則は流体方程式として保存量密度 (エネルギー密度 $T^{00}(x)$, 運動量密度 $T^{0i}(x)$, 電荷密度 $J^0(x)$) に関する運動方程式を与える。ここまでの議論だけでは構成方程式の形を制限することはできないが、さらにここで、考えている系が局所的には熱平衡に近い状態にあると仮定しよう。すると、拡散方程式の議論で $\vec{J} = -D\vec{\nabla}n$ と与えたのと同じようにして、(不可逆過程の局所熱力学などの) 現象論的な観点から構成方程式の一般的な形を制限することができる。その結果として、構成方程式の形は物質によらずに普遍性を持ったものになる。たとえば、エネルギー・運動量テンソルの空間成分は流体の局所的な圧力を $p(x)$ として、 $\langle \hat{T}^{ij}(x) \rangle = p(x)\delta^{ij}$ という形になることが微分展開の最低次の結果として得られる。この式は、「流体は接する面に垂直な圧力を等方的に持つ」とい

う当たり前のことを述べている。大事なのは「系がどんな物質で構成されてようが、圧力 $p(x)$ という物理量で $\langle \hat{T}^{ij}(x) \rangle$ (の最低次) は表される」という普遍性である。

ミクロな物性情報：以上で与えられた構成方程式の形は、物質によらない普遍的なものになっている。しかし当然のことながら、流体の時間発展は、考えている流体の「圧縮しやすさ」や「サラサラ度合い」といった物質の個性に依存する。このような「具体的に考えている物質」が何かという情報は、流体力学においては構成方程式に含まれる物性パラメータ (拡散方程式における拡散係数 D に対応する物理量) にすべて押し込められている。

物性パラメータには大きく分けて次の 2 つがある。1 つ目は物質の熱力学的な (静的な) 性質を与えており、代表例が状態方程式である。既に見たように、局所熱平衡状態に近いという仮定から、構成方程式として $\langle \hat{T}^{ij}(x) \rangle = p(x)\delta^{ij}$ という普遍的な形が微分展開の最低次で得られるが、この圧力 $p(x)$ が保存量密度の値に具体的にどのように依存するかは物質によってまちまちである。そのため

$$p = p(T^{0\nu}, J^0) \quad (7)$$

という物性情報が、流体方程式を閉じさせるために必要になる。2 つ目が輸送係数と呼ばれる物理量 (拡散方程式のパラメータ D に対応) であり、運動量の散逸的な伝わりやすさを表す粘性 η, ζ (η : ずれ粘性, ζ : 体積粘性) や電荷の拡散のしやすさを表す伝導度 σ などがある。まとめて $L_i = \{\eta, \zeta, \sigma, \dots\}$ と書くと、これらが保存量密度の値ごとにどう定まっているかを与える式

$$L_i = L_i(T^{0\nu}, J^0) \quad (8)$$

が流体方程式を解くために必要になる。これらの 2 つの物性パラメータの値は、個別の物質によって決まっており、流体力学のみでは定めることができない情報になっている。そのため、現象論的には熱測定や力学測定などの実験を通して、物質ごとに定めてやるが必要になる。これは熱力学の枠組みだけから、個別の物質の比熱や圧縮率

が定まらなかったこととまったく同じである。

以上の「保存則+構成方程式+物性情報」の3つが流体力学の理論的枠組みを与えている。初めに述べたように、ミクロな記述を与える理論が時空の並進や位相変換に関する対称性を持っていさえすれば、保存則は(運動方程式を満たせば)ミクロにも常に成り立っており、その平均を取ったマクロスケールでの保存則も常に成り立っている。さらに、考えている物理系が局所熱平衡状態に近いという仮定から構成方程式の形は強く制限をされ、物質によらない普遍的な形を持つことが示される。したがって、流体記述にとって、考えている物質の個性を反映するのは状態方程式や輸送係数の値などの物性パラメータだけである。つまり、考えている物理系が、常温の水や空気のように古典粒子で記述可能な原子・分子で構成されていようが、QGPのようにクォーク・グルーオンのような量子場で構成されていようが、局所熱平衡に十分近ければ流体力学の基本的な枠組みはまったく同じように適用できるのだ。これがQGPのような極小スケールの物質に流体力学が適用可能だった理由である^{*2)}。以上の事情は熱力学がマクロな理論体系として普遍性を有していたのと同じことであり、流体力学はマクロな時間発展の普遍性を反映した理論体系とすることができる。

4. ミクロからマクロへ：流体力学の現代的導出

現象論的な観点からは、実験などを通して構成方程式に含まれる物性パラメータさえ決めてしまえば、流体力学は時間発展に関する普遍的な記述を与える。さて、熱平衡状態を記述する熱力学の場合は、ミクロな記述とマクロな記述をつなぐ平衡統計力学が完成しており、物性パラメータはミクロな理論に基づいて(原理的には)計算が可能

であった^{*3)}。では、場の量子論などのミクロな記述に基づいて流体力学に必要な情報を過不足なく定めることはできるだろうか。保存則はミクロな理論の対称性から従うことを思い出すと、これは「ミクロな理論に基づいて、普遍的な構成方程式の形と物性パラメータを計算する方法を与えられるか」という非平衡統計力学の問題である。

この「流体方程式をミクロな記述から導出する」という問題は実に歴史が長く、実際、流体力学研究の創始者である D. Bernoulli 自身も、気体の分子運動論に基づいてボイルの法則の導出を議論していたようである。流体方程式の統計力学的な導出は、線形応答理論の成立前後から盛んに議論されていたが、近年になって、ゆらぎの定理のような非平衡統計力学の発展に基づいた明瞭な理解が与えられた²⁾。この導出法は場の量子論に基づいた場合にも適用できるのでその概略を示そう³⁾。簡単のため、保存量密度として、 $\hat{T}^{0\mu}$ だけを考える。まず、局所熱平衡状態を表す密度分布関数として局所ギブス分布

$$\hat{\rho}_{LG;t} = e^{\int d^3x (\beta_t^\mu(x) \hat{T}_\mu^0(x)) - \Psi[\beta_t^\mu]} \equiv e^{-\hat{S}[\beta_t^\mu]}$$

を導入しよう。添え字 t で時刻 t における分布であることを表した。いま興味があるのは保存量密度(エネルギー密度・運動量密度)の時間発展なので、局所ギブス分布はそれらに共役な示強変数 $\beta^\mu \equiv \beta u^\mu$ を用いて局所熱平衡状態を表している^{*4)}。ここで $\beta = 1/T$ は局所逆温度、 u^μ は流体の4元速度に対応した量を表す。 $\Psi[\beta^\mu]$ は規格化因子で、局所熱平衡状態の熱力学汎関数としての役割を担う。密度演算子は状態ベクトルと同じくハイゼンベルグ描像では時間発展しないので、初期時刻の密度演算子で Tr を取ったものとして、 $\langle \hat{T}^{\mu\nu}(x) \rangle \equiv \text{Tr}[\hat{\rho}_0 \hat{T}^{\mu\nu}(x)]$ のように平均が定義される。この Tr が厳密に実行できればよいのだが、

*2) ひとたび局所熱平衡状態に近いことを仮定したら、QGP といえども流体記述が可能になる。そのため、重イオン衝突実験で生成される QGP の場合は、なぜ局所熱平衡に近い状態が実現しているように見えるのか、あるいは実現していないとしても流体力学が適用できる可能性はあるのか、といったことが重要な未解決の研究課題となっている。

*3) 詳しくは、田崎 晴明氏の記事「ミクロとマクロを繋ぐ難題としての統計力学」を参照。

*4) 現実的には、(平均自由行程などの)ミクロなスケール ℓ_{micro} と(保存量密度の変調に関する)マクロなスケール ℓ_{macro} の間にスケール分離が成立していると仮定する。この仮定は、 β^μ に関する微分展開が可能であるという形で使われる。

理論が解けていない場合、現実的には不可能である。また、一般の初期状態から出発してこの問題を解くのは非常に困難である。しかし、一般の非平衡状態は局所熱平衡状態に速く緩和し、その後、流体力学で記述されるようなゆっくりとした時間発展をしながら大局的な熱平衡状態に向かっていくと考えられる。我々が興味があるのは流体力学で記述できる時間発展なので、局所熱平衡状態に緩和した状態を初期状態として、その後の時間発展を考えることにしよう。つまり、初期状態を局所ギブス分布 $\hat{\rho}_0 = \hat{\rho}_{LG;t_0}$ として、時間発展を考えるのである。初期時刻 t_0 からある程度時間が経った後の時刻 t で状態を見ると、それはもはや初期状態の局所ギブス分布から遠くはなれてた状態になってしまっているだろう。しかしながら、そのような状態はその時刻 t における局所ギブス分布に近いと期待できる。そこで、 $\hat{\rho}_0$ を t における局所ギブス分布とそのズレに分けて、摂動展開の組み替えを行おう。具体的には

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_0 &= e^{-\hat{S}[\beta_{t_0}^{\mu}]} = e^{-\hat{S}[\beta_t^{\mu}] + \hat{S}[\beta_t^{\mu}] - \hat{S}[\beta_{t_0}^{\mu}]} \\ &= e^{-\hat{S}[\beta_t^{\mu}]} \hat{U}_t, \\ \hat{U}_t &\equiv T_{\tau} e^{\int_0^1 d\tau (\hat{S}_{\tau}[\beta_t^{\mu}] - \hat{S}_{\tau}[\beta_{t_0}^{\mu}])}\end{aligned}$$

のように分解し、 $e^{-\hat{S}[\beta_t^{\mu}]}$ を非摂動項、ズレの部分 \hat{U}_t を摂動項とみなすことにする。ここで、添字 τ が付いた演算子を $\hat{O}_{\tau} \equiv e^{\tau \hat{S}[\beta_t^{\mu}]} \hat{O} e^{-\tau \hat{S}[\beta_t^{\mu}]}$ と定義した。この分解を用いると、 $\langle \hat{T}^{\mu\nu}(x) \rangle$ は次式で表される：

$$\langle \hat{T}^{\mu\nu}(x) \rangle = \langle \hat{T}^{\mu\nu}(x) \rangle_t^{LG} + \langle \hat{U}_t \delta \hat{T}^{\mu\nu}(x) \rangle_t^{LG}.$$

ここで、 $\langle \hat{T}^{\mu\nu}(x) \rangle_t^{LG} = \text{Tr} \hat{\rho}_{LG;t} \hat{T}^{\mu\nu}(x)$ は時刻 t における局所ギブス分布での期待値、 δ は局所ギブス分布の期待値からのズレ $\delta \hat{T}^{\mu\nu}(x) \equiv \hat{T}^{\mu\nu}(x) - \langle \hat{T}^{\mu\nu}(x) \rangle_t^{LG}$ を表す。これは、ただの恒等変形なので、時刻 t での $\langle \hat{T}^{\mu\nu}(x) \rangle$ が厳密に解ける場合には、もちろん新たに導入したパラメータ β_t^{μ} の選び方には依らない。しかし、摂動をある次数で打ち切ると陽に β_t^{μ} に依存してしまう。この β_t^{μ} の決め方には任意性があるが、ここでは、時刻 t での保存量

密度の期待値に関する摂動部分が、最小(ゼロ)になるように選ぶことにする： $\langle \hat{U}_t \delta \hat{T}^{0\nu}(x) \rangle_t^{LG} = 0$ 。これは $\langle \hat{T}^{0\mu}(x) \rangle = \langle \hat{T}^{0\mu}(x) \rangle_t^{LG}$ という条件と等価であり、 $\langle \hat{T}^{0\mu}(x) \rangle$ の値から局所熱力学に合致するようにパラメータ β_t^{μ} を定めていることを意味している。この条件により $\beta_t^{\mu} = \beta_t^{\mu}[T^{0\nu}]$ という関係が得られたことになる。また、 $\langle \hat{T}^{\mu\nu}(x) \rangle_t^{LG}$ は熱力学汎関数 $\Psi[\beta_t^{\mu}]$ から求まるが、 $\Psi[\beta_t^{\mu}]$ は熱的に創発した曲がった時空中の場の量子論^{3,4)}を用いて解析され、その結果として微分展開の最低次で $\langle \hat{T}^{ij}(x) \rangle_t^{LG} = p[\beta_t^{\mu}(x)] \delta^{ij}$ という形が求まる。

さて摂動部分であるが、 $\hat{S}[\beta_t^{\mu}] - \hat{S}[\beta_{t_0}^{\mu}] = \int_{t_0}^t d^4x \delta \hat{T}^{\mu\nu} \partial_{\nu} \beta_{t\mu}$ と表されるので、摂動展開は、パラメータの微分展開に対応するとみなせる。たとえば、 $\langle \hat{T}^{ij}(x) \rangle$ の1次の展開部分は、

$$\begin{aligned}\langle \hat{U}_t \delta \hat{T}^{ij}(x) \rangle_t^{LG} &\simeq \int_0^1 d\tau \int_{t_0}^t ds d^3y \langle \delta \hat{T}_{\tau}^{ij}(x) \delta \hat{T}^{\mu\nu}(y) \rangle_s^{LG} \partial_{\mu} \beta_{\nu}(y) \\ &\simeq \beta \int_0^1 d\tau \int_{t_0}^t ds d^3y \langle \delta \hat{T}_{\tau}^{ij}(x) \delta \hat{T}^{kl}(y) \rangle_s^{LG} \partial_k u_l(x)\end{aligned}$$

と評価できる。この $\partial_k u_l$ の係数を η^{ijkl} と書いて、テンソル分解を行うと、輸送係数(ずれ粘性 η ・体積粘性 ζ) がエネルギー・運動量テンソルの2点相関関数で定まるというグリーン・久保公式が得られ、 $\eta = \eta[\beta_t^{\mu}]$ 、 $\zeta = \zeta[\beta_t^{\mu}]$ という関係が得られたことになる。これらの輸送係数や圧力の物性情報は、 β_t^{μ} の汎関数になっているが、 $\beta_t^{\mu} = \beta_t^{\mu}[T^{0\nu}]$ を通じて $T^{0\mu}$ の汎関数になっている。これによって、流体方程式を閉じさせるのに必要な式(7)と(8)を得ることができた。以上の結果と保存則を合わせると、相対論的なナビエ・ストークス方程式という普遍的な流体方程式が得られる。また、流体方程式に現れるすべての物理量が(原理的には)場の量子論で計算可能な量に結び付けられており、それぞれの具体的な関数形が個別の物性情報を担っている。以上により、ミクロな場の量子論による記述からマクロな流体力学による記述への道筋がつけられたことになる。以上の導出は、原理的には2次、3次と微分展開の次数をあげることによ

て摂動展開の精度を上げることができる．ここで議論した方法とは別の方法ではあるが，QGPの物理では2次の微分展開までが盛んに議論され，実際の解析に使われている．

5. 最近の発展 1: 量子異常と輸送現象

系の持っているミクロな対称性が，流体方程式の保存則を与えていることを思い出すと，対称性がなんらかの理由で破れたときには流体力学にも大きく影響することが推測できる^{*5)}．このような対称性の破れの中に，場の量子論に特有な量子異常という対称性の破れが存在する．量子異常は，系の古典的な作用が対称性を持っているように見えても，量子化した理論ではその対称性が破れる，という現象を表す．典型例がカイラルフェルミオンで構成される系の $U(1)_A$ 対称性で，この場合は，作用が連続対称性を持っているにもかかわらず $\partial_\mu \hat{J}_A^\mu = C \vec{E} \cdot \vec{B}$ というように対応するカレントは湧き出し項を持った非保存則に従う．ここで， \vec{E} と \vec{B} はそれぞれ電場と磁場を表している． C は量子異常によって決まる定数である．さて，このような量子異常による対称性の破れを含んだ物理系を流体力学により記述しようとする時，特異な輸送現象が生じることが近年明らかになってきた．具体的には，カイラルフェルミオンで構成された流体中では磁場や流体の渦に沿った電流が生じることがわかってきた．それぞれカイラル磁気効果(Chiral magnetic effect)，カイラル渦効果(Chiral vortical effect)と呼ばれる^{5,6)}．これらは，電場に沿った電流を表す伝導電流と違って，(ジュール熱の発生のような)エントロピー生成を引き起こさない非散逸性の輸送現象になっている．しかし，そもそもこのような電流の存在には強い違和感を覚えるかもしれない．違和感の正体は次のように考えられる．カイラル磁気効果やカイラル渦

効果は，磁場 \vec{B} と渦度 $\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{v}$ として

$$\vec{J} = \sigma_B \vec{B} + \sigma_\omega \vec{\omega} \quad (9)$$

という電流の存在を示している．しかし，この式の両辺をパリティ変換すると，左辺はベクトルとして $\vec{J} \rightarrow -\vec{J}$ と符号を反転させるのに引き換え，右辺の \vec{B} や $\vec{\omega}$ は軸性ベクトルのため符号はそのままである．つまり，カイラル磁気効果やカイラル渦効果が存在するためには，物性パラメータである輸送係数 σ_B や σ_ω がパリティ変換に対して符号を変える必要があるのだ．これは，考えている物理系がパリティ対称性を破るようなパラメータを持っているときに可能になるが，軸性電荷 J_A^0 に関する化学ポテンシャルが，まさにその役割を果たすのである．これは，右巻き・左巻きのカイラルフェルミオンの数がバランスしていない状況を表している．さらに，粘性や伝導度などの輸送係数と異なり， σ_B と σ_ω は化学ポテンシャルなどの熱力学的なパラメータだけで定まり，系が弱結合でも強結合でも値を変えることがなく

$$\sigma_B = \frac{e\mu_5}{2\pi^2\hbar}, \quad \sigma_\omega = \frac{\mu\mu_5}{2\pi^2\hbar} \quad (10)$$

となる．ここで， μ, μ_5 はそれぞれ電荷と軸性電荷に関する化学ポテンシャルである． σ_B と σ_ω は， \hbar を含むので量子的な効果である．このように相互作用の強さによらないのはまさに量子異常の特徴であり，カイラル磁気効果やカイラル渦効果はマクロな流体記述における量子異常の現れと言える^{*6)}．カイラル磁気効果はワイル半金属という特別な物質中において観測されたという報告が出始めているが⁷⁾，重イオン衝突で作られたQGPや宇宙における超新星や中性子星などに関連して，新しい物理現象の理論的提案や実験による精力的な検証が，分野の垣根を越えて進められている．

6. 最近の発展 2: 流体力学の有効ラグランジアン

流体力学とはマクロ(長波長)な変数に関する時

*5) たとえば，自発的対称性の破れが生じた系では，保存量に加えて南部・ゴールドストーンモードという新たな低エネルギーの自由度が現れることで，超流動のような特異な振る舞いが生じることが知られている．

*6) これは，ミクロなQCDが持つ量子異常の効果が，パイ中間子に関する低エネルギー(マクロ)の有効理論においても残り続けたのと同じ事情である．

間発展の普遍性を反映した理論体系であった。さて、場の量子論においても、対称性が自発的に破れたときには長波長において普遍的な振る舞い(南部・ゴールドストーンモード)が見出される。この振る舞いを記述する理論的手法として、経路積分形式に基づいた有効ラグランジアンの方法がある。近年、この手法に基づいた流体力学の理解が進んできたので、簡単にまとめよう⁸⁾。

有効ラグランジアンの方法では、対称性変換のパラメータを局所化したものが自由度となる。たとえば QCD の場合には、カイラル変換のパラメータを局所化したものがパイ中間子の自由度と同定される。流体の場合にも同様に、エネルギー・運動量保存則に対応した並進対称性の変換パラメータを局所化したもの (χ^μ と書く) を自由度とする。この自由度はラグランジュ記述における流体粒子の位置に対応する自由度となっており、最終的に局所熱力学変数と対応させられる。さて、通常の意味でのラグランジアンでは散逸を記述するのが困難であるが、これは Schwinger-Keldysh 形式という場の自由度を 2 倍にした理論形式を用いることで解決できる⁸⁾。Schwinger-Keldysh 形式では、2 種類の場合 (χ_R, χ_A) を用いて理論が記述され、分配関数は以下の形を取る：

$$Z = \int \mathcal{D}\chi_R^\mu \mathcal{D}\chi_A^\nu e^{iS_{\text{eff}}[\chi_R^\mu, \chi_A^\nu]} \quad (11)$$

この有効作用 $S_{\text{eff}}[\chi_R^\mu, \chi_A^\nu]$ は流体力学の満たす対称性を尊重するように、 χ_A^ν に関する展開と微分展開の、2 重の展開のもとに構成される。対称性の中には、とくに Kubo-Martin-Schwinger (KMS) 条件を拡張したものも含まれており、これは非平衡統計力学におけるゆらぎの定理に対応している。以上のもとに、 χ_A^ν に対する 1 次の展開では

$$\left. \frac{\delta S[\chi_R, \chi_A]}{\delta \chi_A} \right|_{\chi_A^\nu=0} = \partial_\mu T^{\mu\nu} = 0 \quad (12)$$

を満たすように運動が決まる。これは、すでに議論してきた流体方程式を与えている。また、 χ_A^μ に対して 2 次以上の展開を行うと、確率的なゆらぎを含む流体力学(ゆらぐ流体力学)が得られる。一

般化された KMS 条件は、 χ_A^μ の次数が高い項と次数が低い項の関係を定めており、たとえば χ_A^μ の 1 次と 2 次の項の間関係はよく知られた揺動散逸関係を与える。また、有効ラグランジアンに含まれる係数は輸送係数などの物性パラメータに対応し、相関関数をミクロな理論とマッチングさせることによって決められるが、これが輸送係数に対する久保公式を与えるのである。以上の経路積分形式に基づいた流体力学の定式化は、量子異常が含む場合への拡張や実際の物理系への応用など、これからいろいろな進展が期待されている。

7. おわりに

歴史の長い流体力学の研究が今後も活発に続くか疑問に思う読者も多いかもしれないが、ここに 2020 年代は流体力学ルネサンスの時代であると主張して筆(?)を置こう。無謀にも思える主張であるが、これは 10 年先の物理を行っていたと言われる当代随一であった物理学者の次の言葉から、(簡単な計算により)示すことができるであろう。

「家に帰っても、寝ているときも何か新しい発見はないかと考え続けている。最近では流体力学が面白い」(南部 陽一郎)

(『毎日新聞』2013.7.17 より、強調は引用者)

参考文献

- 1) M. Rangamani, *Class. Quant. Grav.* **26**, 224003 (2009).
- 2) Shin-ichi Sasa, *Phys. Rev. Lett.* **112**, no. 10, 100602 (2014).
- 3) T. Hayata, Y. Hidaka, T. Noumi and M. Hongo, *Phys. Rev. D* **92**, no. 6, 065008 (2015)
- 4) M. Hongo, arXiv:1611.07074 [hep-th].
- 5) D. E. Kharzeev, *Prog. Part. Nucl. Phys.* **75**, 133 (2014).
- 6) D. T. Son and P. Surowka, *Phys. Rev. Lett.* **103**, 191601 (2009).
- 7) Q. Li *et al.*, *Nature Phys.* **12**, 550 (2016).
- 8) M. Crossley, P. Glorioso and H. Liu, arXiv:1511.03646 [hep-th]; 1701.07817 [hep-th].

(ひだか・よしまさ, 理化学研究所)
(ほんごう・まさる, 理化学研究所)